

文章编号: 1000-7598-(2008)11-2919-08

利用全概率方法分析岩土力学 数值模拟结果的变异性

黄 诚, 杨春和, 王安明

(中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 武汉 430071)

摘 要: 提出了一种用于分析在多参数随机情况下岩土力学数值模拟结果变异性的全概率方法。以特定数值模拟结果为随机隐式响应量, 根据多维高效数值求积理论, 计算出响应量特定函数的均值, 利用快速傅里叶变换数值概率分析方法及笔者开发的极大熵分布, 求解器软件一次性求解出响应量的全概率分布, 用于定量评估数值模拟结果的变异性。算例表明该法具有精度和计算效率较高的优点。

关 键 词: 岩土力学数值模拟; 全概率方法; 数值概率分析方法; 快速傅里叶变换; 极大熵原理; 可靠性分析; 参数变异
中图分类号: O 211.9 **文献标识码:** A

Using of full probability method to statistically estimate results of numerical simulation for geomechanics

HUANG Cheng, YANG Chun-he, WANG An-ming

(State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics,
Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

Abstract: A full probability method is presented to statistically evaluate the variation of geomechanics numerical simulation results subject to multi-random parameters. Taking the interested results as stochastic implicit response variables, firstly the expectations of some special functions of response variables are determined by the high performance multidimensional numerical integration. Then the full probability distribution function of the interested numerical simulation results is obtained to quantitatively analyze the variation effect using two proposed method including numerical probability analysis method based on fast Fourier transform (FFT) and the maximum entropy distribution solver software developed by the authors. The numerical examples show that this method has higher accuracy and the computational effort is reduced.

Key words: numerical simulation of geomechanics; full probability method; numerical probability analysis; fast Fourier transform (FFT); maximum entropy method; reliability analysis; variation of parameters

1 引 言

岩土介质力学参数具有显著变异性特征, 因此在采用数值方法对岩土工程进行稳定性分析时如何评价计算结果的可靠性是一个非常重要的问题, 在大型通用数值模拟软件普遍流行的今天尤为迫切^[1]。研究这个问题可以直接采用一些有关可靠性研究的思路, 而可靠性方法按其发展阶段和准确程度的不同又可分为 3 个水准: 水准 I 又称“半经验

半概率法”, 是对影响响应量随机性的某些参数进行数理统计分析, 并与经验结合引入某些经验系数, 但未对可靠性进行定量分析; 水准 II 又称“近似概率法”, 以响应量符合某个极限准则的失效概率或可靠指标来度量响应量的可靠性, 计算时采用近似的 1 次 2 阶矩法; 水准 III 又称“全概率法”, 要求对响应量采用更加精确的概率分析, 以求得响应量的完整概率分布函数^[2]。目前, 可靠性分析中应用最多的是水准 II, 而水准 III 尚处于初步研究阶

收稿日期: 2008-03-04

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目 (No.50725414); 国家自然科学基金创新群体项目 (No.50621403); 科技部国际合作计划项目 (2007DFB60100)。

作者简介: 黄诚, 男, 1977 年生, 助理研究员, 博士, 主要从事地下空间稳定性研究的可靠性分析评估方面的。E-mail: tjhuangcheng@163.com

段, 但却是可靠性研究方法进一步发展的大势所趋, 它目前只适用于很简单的情况, 为了增强其适用性, 有研究者提出了针对线性极限状态方程的快速傅立叶变换法^[3, 4]及最大熵法^[5]等全概率分析方法。

快速傅立叶变换法具有强大的全概率分析功能, 但不能直接处理岩土力学中的非线性隐式响应量。最大熵法应用于岩土力学随机分析的困难之处在于无法准确高效地求得隐式响应量的高阶矩。现用的一些方法, 比如基于分析技术的 Neumann 随机有限元法虽能求得高阶矩, 但需要对确定性有限元程序加以改造, 对于非线性问题及基本变量变异系数大的问题, 将存在较大的计算误差, 且计算量仍然太大而不能应用于岩土力学问题^[2]。而一些能求得高阶矩的方法又不能处理隐式响应量; Monte-Carlo 随机有限元法也是一种全概率方法, 能一次性求得响应量的全概率分布, 适应性也强, 但因为计算量太大, 在岩土力学问题的分析中没有实用价值可言。针对全概率方法应用中的这些困难之处, 本文提出将多维高效积分法与 FFT 概率数值分析方法及最大熵法配合使用的变异性评价方法, 大大增强了全概率方法的适用性, 解决了其在岩土数值模拟结果变异性分析中的应用问题。高效积分法能充分利用现有通用数值模拟软件资源, 较准确地求得在多参数随机变异情况下非线性隐式响应量的特定函数的均值, 计算量在现有硬件条件下也是可以接受的。与之配合使用的 FFT 方法与最大熵法可以进一步较精确地求出岩土数值模拟结果的全概率分布, 从而定量评价其变异性。该方法基于全概率思想, 比仅利用期望与方差信息的 1 次 2 阶矩类方法更为先进合理, 提供了一种定量评估在多参数随机变异情况下岩土数值模拟结果变异性的新方法。本文提供的各种算例证明了该方法的有效性与实用性。

2 岩土数值模拟结果的变异性描述

岩土力学非线性数值模拟方法包括有限元法、边界元法、有限差分法等。本文以有限元法为例进行说明, 一般的具有随机参数的非线性岩土力学问题的有限元描述为

$$\mathbf{K}(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta})\boldsymbol{\delta} = \mathbf{F}(\mathbf{V}, \boldsymbol{\delta}) \quad (1)$$

式中: $\boldsymbol{\delta}$ 为节点位移列阵; $\mathbf{V} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ 为输入参数的随机向量; $\mathbf{K}$ 为非线性问题的刚度矩阵, 它是 $\mathbf{V}$ 与 $\boldsymbol{\delta}$ 的函数。解非线性方程组为式 (1) 可获

得结点位移, 进一步可导出单元的应变, 应力解, 一般地任何力学响应量均可由 $\boldsymbol{\delta}$ 导出。由于 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{F}$ 是具有随机参数的矩阵和向量, 因而所有的响应量皆是随机向量 $\mathbf{V}$ 的函数。如果假定响应量为 $\mathbf{Y}$, 则可表示成响应函数 $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\mathbf{V})$, 所以响应量是一个多维随机变量的函数, 它本身也是一个随机变量^[6], 这是岩土数值模拟结果存在变异性的根源之一, 也是本文研究的出发点。记输入随机向量 $\mathbf{V}$ 的联合概率密度函数为 $f(\mathbf{V})$, 在这个前提下求解响应函数 $\mathbf{Y}(\mathbf{V})$ 的全概率分布, 分析其变异性是本文的研究目的。

3 高效积分法求隐式响应量的均值

为了使用 FFT 方法及最大熵法求解响应函数 $\mathbf{Y}(\mathbf{V})$ 的全概率分布, 首先要解决如何求出响应函数 $\mathbf{Y}(\mathbf{V})$ 的特定随机函数 $Y'(\mathbf{V})$ 的均值的问题, 关于 $Y'(\mathbf{V})$ 的具体形式在下文有详细论述。根据概率分析理论, 易得其均值 $E[Y'(\mathbf{V})]$ 为

$$E[Y'(\mathbf{V})] = \int_{\Omega} Y'(\mathbf{V}) f(\mathbf{V}) d\mathbf{V} \quad (2)$$

式中: Ω 为整个概率空间的积分区域。另外, 被积函数是没有解析表达式的离散性函数, 式 (2) 的积分只可使用数值积分方法, 而每一次函数值的计算都要调用一次数值分析程序, 这种计算是很耗时的, 必须选用最高效的多维积分方法^[6]。在研究具体方法之前, 如果假定响应量是输入参数的充分连续光滑函数, 对于大多数连续介质非线性问题是适用的, 响应函数的充分光滑性对于数值积分的精度有重要意义^[7-8]。再假设基本随机变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 服从正态分布, 且相互间统计独立, 如果不符合这个假定, 可以通过等概率变换和积分变换达到这个要求。由于 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是 n 个相互独立的正态分布随机变量, 则其联合概率密度函数可以很方便地写成

$$f(\mathbf{V}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{xi} \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x_i - \mu_{xi})^2}{2\sigma_{xi}^2} \right] \quad (3)$$

求解均值的积分式 (2) 可写为

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} Y'(\mathbf{V}) f(\mathbf{V}) d\mathbf{V} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} Y'(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \\ &\quad \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{xi} \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x_i - \mu_{xi})^2}{2\sigma_{xi}^2} \right] dx_1 \dots dx_n \end{aligned} \quad (4)$$

关于式 (4) 的概率积分问题, 有不少数学家进行了研究。为了应用这些积分理论, 做变量代换:

$$t_i = \frac{x_i - \mu_i}{\sqrt{2}\sigma_i} \quad (5)$$

则

$$x_i = \sqrt{2}\sigma_i t_i + \mu_i$$

将式 (5) 代入式 (4), 做积分变换可得

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} Y'(\mathbf{V}) f(\mathbf{V}) d\mathbf{V} = \\ &\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} Y'(\sqrt{2}\sigma_1 t_1 + \mu_1, \cdots, \\ &\sqrt{2}\sigma_n t_n + \mu_n) \exp\left(-\sum_{i=1}^n t_i^2\right) dt \end{aligned} \quad (6)$$

对于式 (6) 的多维积分运算, 参见文献[6]。

4 随机响应量全概率分布的求解

在已经求得 $E[Y'(\mathbf{V})]$ 的前提下, 本文提供 2 种方法以求数值模拟结果 $Y(\mathbf{V})$ 的全概率分布。下面详细叙述其基本理论与具体步骤。

4.1 快速傅立叶变换数值概率分析方法

FFT 是计算离散傅里叶变换的一种高效快速方法, 具有强大的全概率数值分析功能^[3-4], 具体实现需要编制复杂的计算程序, 以下详细叙述。

4.1.1 概率特征函数的定义

随机响应量的概率密度函数与特征函数可以表示为一个 Fourier 变换对, 本文定义为

$$\left. \begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy; \\ f(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega y} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中: $f(y)$ 与 $F(\omega)$ 分别为随机响应量 Y 的概率密度函数与特征函数; ω 为变换参数, $i = \sqrt{-1}$ 。特征函数的引进本质上是对分布函数作 Fourier 变换, 其与分布函数间存在着——对应关系, 因而特征函数也是刻画随机变量分布的一种形式。随机变量的分布函数由其特征函数唯一确定^[11]。

4.1.2 利用高效积分法求特征函数

为了求解式 (7) 中的 $F(\omega)$, 利用如下的转换关系:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy = E[e^{-i\omega Y}] = \\ &E[\cos(\omega Y)] - iE[\sin(\omega Y)] \end{aligned} \quad (8)$$

为了方便 FFT 的运用, 对 $f(y)$ 进行向右坐标平移 t_0 , $f(Y) \rightarrow f(Y - t_0)$, 于是式 (8) 变为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y - t_0) e^{-i\omega y} dy e^{-i\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy \quad (9)$$

欲求式 (9) 先求式 (8), 而式 (8) 表明, $F(\omega)$ 是另一个函数 $Y' = e^{-i\omega Y}$ 的均值, 因 $Y = Y(\mathbf{V}) \Rightarrow$

$Y' = Y'(\mathbf{V})$, 所以式 (8) 又可写为

$$F(\omega) = E[Y'(\mathbf{V})] = \int_{\Omega} Y'(\mathbf{V}) f(\mathbf{V}) d\mathbf{V} \quad (10)$$

式 (10) 的积分完全可以利用高效数值积分法来完成, 具体如何求解 $E[Y'(\mathbf{V})]$ 在本文第 2 节已有详细地论述。求特征函数的具体实现分以下 4 步:

① 高效积分法求解响应函数 $Y = Y(\mathbf{V})$ 的均值与方差 σ_Y 。

② 根据傅氏变换的位移性质, 对特征函数进行平移。

③ 在频域进行离散采样。首先将 ω 进行离散, $\omega_j = (j-1)2\pi/T_p$, $j=1, 2, \dots, N/2+1$, 其中 $T_p = k\sigma_Y$, 一般取 $k \geq 8$ 即可; N 为采样点总数, 为了高效的执行 FFT, 一般取 $N = 2^m$, m 为整数, 然后利用式 (10) 用高效积分法求解。

④ 根据 Fourier 变换的对称性进行操作, 实部正对称, 虚部反对称, 生成另外一半频率采样点。最后生成完整的频率采样向量。

4.1.3 快速 Fourier 逆变换求概率分布

本文利用 FFT 求解式 (7) 傅里叶变换对中的 $f(Y)$, 其离散傅里叶变换定义为

$$f(Y_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega Y_j} d\omega = \frac{1}{T_p} \sum_{k=0}^{N-1} F(\omega_k) e^{i \frac{2\pi k j}{N}} \quad (11)$$

式中: $Y_j = j\Delta Y = jT_p / N$, $j=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。然后, 进行坐标平移, $Y_j = Y_j - t_0$, 至此就可以利用离散化的概率密度函数的积分式 (12) 求解随机响应量的离散化概率分布函数 $C_Y(Y)$:

$$C_Y(Y_j) = \int_{-\infty}^{Y_j} f(Y) dY = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{f(Y_k) + f(Y_{k+1})}{2} \Delta Y \quad (12)$$

4.1.4 程序研制与算例验证

为了方便 FFT 概率数值分析方法的运用, 笔者基于以上所述 FFT 概率分析的基本原理编制了 Visual Fortran 95 随机计算分析程序, 下面以一个算例来验证该程序的全概率分析功能。

某桩基础承载力计算的极限状态方程为 $Z = g(R, SG, SQ) = R - SG - SQ = 0$, 其中 R 为抗力服从对数正态分布; SG 为永久荷载效应服从正态分布; SQ 为汽车、人群等产生的可变荷载效应服从极值 I 型分布。已知 $\mu_R = 365.8$ kN, $\sigma_R = 54.9$ kN, $\mu_{SG} = 63.0$ kN, $\sigma_{SG} = 5.8$ kN, $\mu_{SQ} = 84.0$ kN, $\sigma_{SQ} = 25.2$ kN。求失效概率和可靠指标。利用该程序求出的极限状态变量的完整概率密度函数如图 1 所示。

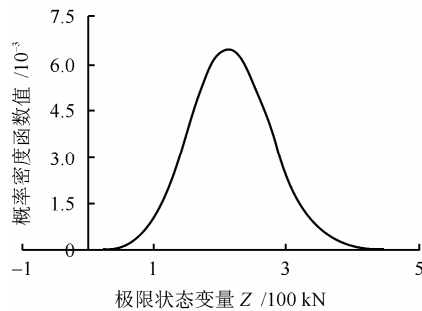


图1 极限状态变量的概率密度函数

Fig.1 Probability density function plot for limit state variable Z

然后, 通过积分得到失效概率 $P_f = 1.438 4 \times 10^{-4}$, $\beta = 3.626 1$, 而 100 万次 Monte-Carlo 模拟的失效概率为 $1.436 52 \times 10^{-4}$, $\beta = 3.626 5$ 。将对数正态和极值 I 型变量在验算点处当量正态化处理的 1 次 2 阶矩法的迭代结果为 $P_f = 1.411 2 \times 10^{-4}$, $\beta = 3.631 1$ 。上面的结果对比验证了该程序的正确性, 而且 FFT 方法显示了其全概率分析的优势, 就是一次性求得了极限状态量的完整的概率密度函数, 使得研究者对于极限状态量的整体随机性有了了解。

4.2 基于最大熵原理的数值概率分析方法

4.2.1 最大熵分布的求解原理与步骤

最大熵法的根据是 Jaynes 原理: 最少偏见的概率分布是这样一种分布, 它使熵在根据已知信息附加的约束条件下最大化^[12]。对于一维连续型随机变量, 熵 H 由式 (13) 定义

$$H = \int_{\mathcal{R}} f(x) \ln[1/f(x)] dx \quad (13)$$

式中: $f(x)$ 为连续型随机变量 x 的概率密度函数。由于熵从数学本质上是概率密度函数的泛函, 所以可以利用有关泛函极值的理论求解最大熵分布函数。其严格的数学描述如下:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\mathcal{R}} f(x) \ln[1/f(x)] dx &= \text{Max}; \\ \int_{\mathcal{R}} f(x) dx &= 1; \quad \int_{\mathcal{R}} x f(x) dx = \mu_x; \\ \int_{\mathcal{R}} (x - \mu_x)^i f(x) dx &= E_x^i, \quad i = 2, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中: m 为所用的矩的阶数; μ_x 为均值; E_x^i 为第 i 阶中心矩, 则第 2 节所讨论的 $Y'(V)$ 表示为

$$Y'(V) = \begin{cases} Y(V) \\ \{Y(V) - E[Y'(V)]\}^i, & i \geq 2 \end{cases} \quad (15)$$

通过第 2 节所述的方法求得 $E[Y'(V)]$, 则 μ_x 与 E_x^i 为已知。再通过拉格朗日方法可以求得最大熵密度函数的解析形式为

$$f(x) = \exp[\lambda_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i (x - \mu_x)^i] \quad (16)$$

剩下的问题是确定式 (16) 中各个拉格朗日系数 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$, 文献[12]给出了详细地推导, 本文在此不再详述。

4.2.2 最大熵法软件的研制

最大熵法的实现需要依靠复杂的计算程序, 为方便运用, 用 VC++ 语言开发了最大熵分布求解软件, 程序核心代码采用了各种促进收敛的优化算法求解非线性积分方程组, 且具有自动确定并调整积分上下限的功能, 该软件用户界面友好, 操作方便易用, 如图 2 所示, 可以方便地应用于本文课题的研究中。

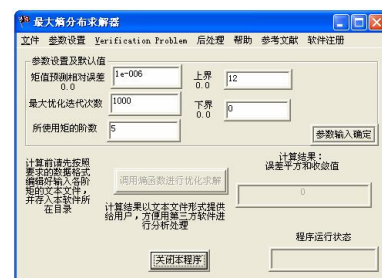


图2 本文编制的最大熵法软件的界面

Fig.2 Interface of the maximum entropy software

5 算例验证

下面将利用本文所编制的多维高效积分程序、FFT 数值概率分析程序及最大熵法软件对各种非线性数值模拟的结果进行具体的变异性分析。并以收敛的 Monte-Carlo 模拟结果与之对比, 以广泛考察本文方法的正确性。

5.1 结构隐式计算结果变异性的 FFT 分析

5.1.1 问题描述

设由 3 根桁架组成的一个结构系在其底部节点受到一个作用力, 如图 3 所示, 假设由于制造因素的影响, 3 根桁架杆的截面积具有随机性, 各自服从正态分布。现在要考察 3 杆截面积的变异性对其内力计算结果的影响程度。设材料的弹性模量 $E = 2.07 \times 10^8$ kPa, 力 $F = 88.96$ kN, 3 根杆的截面积分别服从 $N(0.127 \text{ m}, 0.012 7 \text{ m})$, 且相互统计独立。显然各杆的内力与随机变量之间的关系是隐式的, 本文用杆系有限元法求解。

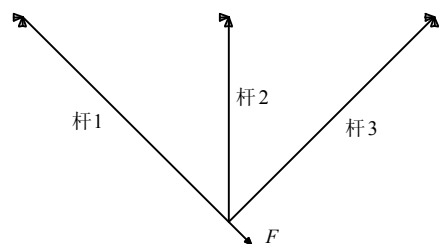


图 3 3 根杆组成的带随机因素的超静定桁架结构
Fig.3 Problem sketch of the indeterminate 3-Bar truss with uncertain parameters

5.1.2 高效积分法频率采样

下面以杆 1 轴力为随机响应量研究对象, 用高效积分法在频域进行离散采样。首先, 将 ω 进行离散, $w_j = (j-1)2\pi/T_p$, $j=1, 2, \dots, N/2+1$, 其中各参数取值为: $T_p = 20\sigma_Y$, $N = 2^{15}$, 时间间隔 $\Delta t = T_p/N$ 。具体针对式 (8) 的采样结果如图 4 所示。

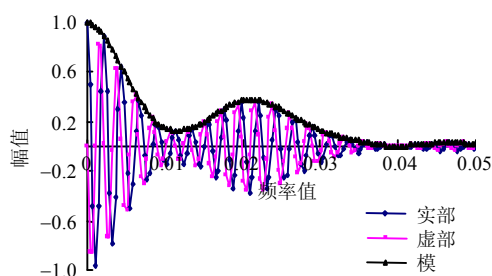


图 4 杆 1 轴力的特征函数的频率采样图
Fig.4 Sample of characteristic function of bar 1

根据连续光滑函数的 Fourier 级数的系数收敛性质, 对图 4 所示的采样结果进行截断处理, 取如图 5 所示的有效部分。

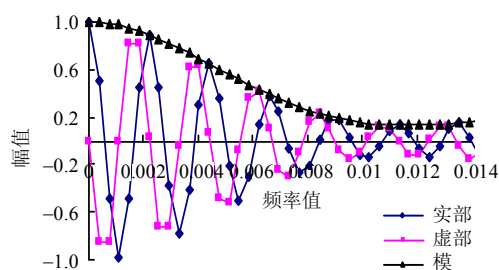


图 5 频率采样的有效部分
Fig.5 The validity part of sample of characteristic function

根据图 5 可以进行对称操作生成完整的特征函数频率采样向量。

5.1.3 快速 Fourier 逆变换求分布

对完整的特征函数频率采样向量进行快速 Fourier 逆变换, 就可以求得离散化的概率密度函数, 进而求得分布函数。由于 Monte-Carlo 模拟 (MCM) 不受问题性质和维数的限制, 其充分收敛的模拟结果被认为是准确的, 可以用来验证其他分析方法的正确性。下面先给出 Monte-Carlo 模拟结果, 因为一个随机变量的随机性质受其高阶矩的影响, 所以只有高阶矩也充分收敛才能判定 Monte-Carlo 模拟也收敛。从图 6 可以判断本文所做的 10 000 次 Monte-Carlo 模拟的无量纲峭度系数已经收敛, 可据此判定本文所做的 Monte-Carlo 模拟结果具有足够的精确度, 用于验证快速 Fourier 变换得出的分布函数。本文采用 3 点高斯积分公式, 需计算 27 点上的响应量值, 与 10 000 次 Monte-Carlo 模拟相比具有巨大的计算效率优势。

图 7 和图 8 给出了两种方法随机响应量的分布函数的对比。

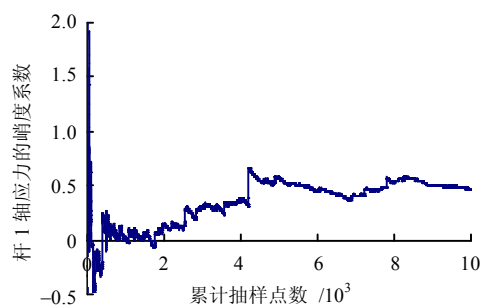


图 6 杆 1 轴力响应的峭度系数收敛曲线
Fig.6 The sample history of kurtosis of axial stress of bar 1

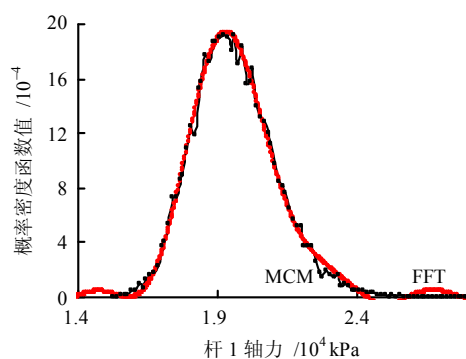


图 7 MCM 与 Fourier 变换法的概率密度函数的对比
Fig.7 Comparison of probability density function from MCM and from FFT for axial stress of bar 1

从图 7 与图 8 可以看出, 本文快速 Fourier 变换方法调用了 27 次有限元计算就达到了 10 000 次

Monte-Carlo 模拟法的精度，可见该方法的计算效率是相当高的。

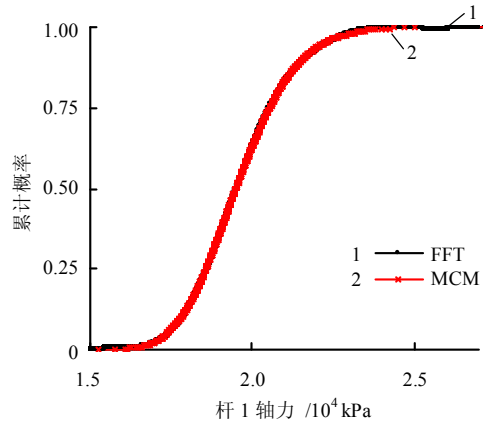


图 8 MCM 与 Fourier 变换法的累计分布函数的对比
Fig.8 Comparison of cdf from MCM and from FFT for axial stress of bar 1

5.2 材料蠕变模拟结果变异性的最大熵法分析

设一个长 $l=0.254\text{ m}$ ，横截面积 $A=6.451\ 6\times 10^{-4}\text{ m}^2$ 的螺钉（ $E=207\text{ GPa}$ ）被张拉至初始应力 $\sigma_0=6.89\text{ MPa}$ 。并将其置于高温环境 $T_0=500\text{ }^\circ\text{C}$ 下一段较长的时 $t_1=1\ 000\text{ h}$ 。如图 9 所示。螺钉材料的蠕变应变率定义为： $d\varepsilon/dt=k\sigma^n$ ， $K=6.48\times 10^{-57}/h$ ， $n=7$ 。由于蠕变，螺钉会发生应力松弛，用有限元法来求解这个螺钉应力松弛问题。

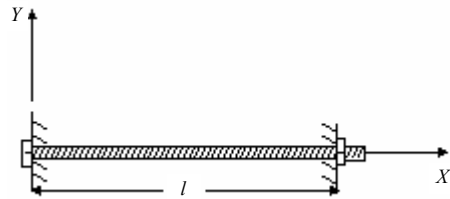


图 9 带随机因素的螺钉蠕变导致应力松弛模型
Fig.9 Problem sketch of stress relaxation of a tightened bolt due to creep with uncertain parameters

材料的蠕变参数一般是通过试验数据拟合得到的，必然带有随机性。假定材料本构参数 k 、 n 和初始应力 σ_0 皆服从正态分布，均值如上所示，变异系数为 0.1。下面用本文提供的随机分析方法考察蠕变计算结果的变异性。

首先，用 Monte-Carlo 模拟求出该问题的相对精确解答。以螺钉应力松弛 420 h 后的残余应力为响应量研究对象，图 10 为 10 000 次 Monte-Carlo 模拟的结果。

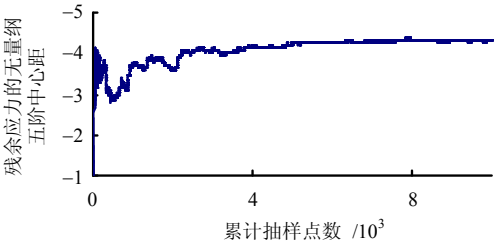


图 10 螺钉应力松弛 420 h 后残余应力无量纲 5 阶中心矩的 Monte-Carlo 模拟收敛过程
Fig.10 The sample history of dimensionless fifth central moment of residual stress after 420 hours creep

图 10 显示 Monte-Carlo 模拟结果的高阶矩已经完全收敛了，可以作为相对精确值使用。本例共有 3 个随机参数，采用 Stroud 5 阶积分公式，总共需要计算 19 个样本值。螺钉应力松弛 420 h 后的残余应力是一个随机响应量，其高阶中心矩的计算结果见表 1。图 11 给出了两种方法分布函数的对比。

表 1 两种方法反应矩计算结果的对比
Table 1 The contrast of central moments from MCM and the Gauss integration method

矩阵	方法		相对误差 /%
	MCM (10 000 次)	积分法 (Stroud 5 阶)	
均值	8.24×10^2	8.37×10^2	1.64
2 阶中心矩	5.44×10^4	5.73×10^4	5.43
3 阶中心矩	-9.82×10^6	-1.16×10^7	18.13
4 阶中心矩	8.18×10^9	8.40×10^9	2.66
5 阶中心矩	-2.97×10^{12}	-3.24×10^{12}	9.15

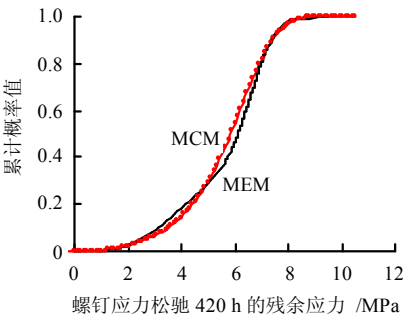


图 11 MCM 与最大熵法的螺钉应力松弛 420 h 后残余应力的累计分布函数的对比
Fig.11 Comparison between cumulative distribution function from MCM and MEM for residual stress after 420 hours creep

从图 11 可以看出，最大熵分布的误差主要发生在均值点附近，其两端尾部的误差很小，所以该法特别适合于求解工程结构这种具有高可靠度的随机问题。

6 隧道围岩稳定性分析中的变异性

在当前隧道围岩稳定性的研究中, 基于连续介质模型的非线性数值模拟方法被广泛采用, 但应该引起注意的是, 这种数值模拟结果的准确度强烈地依赖于岩土参数的合理输入, 而一般情况下多个岩土参数都具有较强的变异性, 将导致数值模拟结果的变异性更大, 所以单纯采用参数的试验均值输入得出的计算结果一般情况下可信度很低。下面就采用本文提出的全概率可靠性分析方法考察这种变异性的影响并求围岩失效概率。

隧道模型描述: 一灰岩中的深埋圆形隧道, 毛洞半径 $R=3.0\text{ m}$, 地应力接近静水应力状态, 测试值为 30 MPa 。选取典型的地质剖面, 按轴对称和平面应变的双重对称条件建立连续介质计算模型, 对毛洞开挖的稳定性进行分析, 如图 12 所示。

采用的岩石本构模型为 Mohr-Coulomb 弹塑性模型。室内试验得出的岩石参数见表 2。

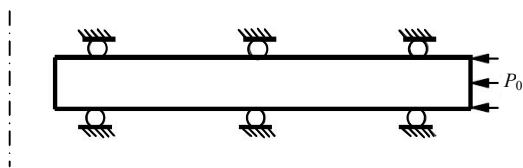


图 12 隧道计算模型

Fig.12 Tunnel model for numerical analysis

表 2 围岩参数与地应力

Table 2 Rock parameters and geostress

项目	E/GPa	μ	c/MPa	$\varphi/(\text{°})$	σ/MPa
均值	20	0.2	1.7	34.88	30
变异系数	0.1	0	0.1	0.1	0.1
分布类型	正态	定值	对数正态	对数正态	极值 I 型

根据毛洞开挖后隧道拱顶的极限位移, 建立隧道稳定分析的极限状态方程为

$$z = g(x) = [u] - u(E, c, \varphi, \sigma) \quad (17)$$

式中: $[u]$ 为抗力项, 是拱顶位移的最大允许值, 可以取 $[u] = 1.34\% \times R$; u 为荷载效应, 是基本随机变量包括围岩力学参数和地应力的隐式函数。

本文采用全概率分析方法求解隧道的隐式功能函数的完整概率分布。下面首先进行参数敏感性分析, 以确定最终参与计算的随机变量。具体分析方法为, 假定其中某一个参数的变异系数为 0.1, 其他参数取试验均值, 求解出位移荷载效应的均值与

变异系数, 变异系数大者, 则敏感性更强。计算结果见表 3。

表 3 参数敏感性分析结果

Table 3 Results of parameter sensitivity analysis

项目	参数			
	E	c	$\varphi/(\text{°})$	$\sigma_{\text{地应力}}$
拱顶位移响应均值 /cm	1.66	1.65	1.72	1.65
拱顶位移响应变异系数	0.10	0.07	0.25	0.17

由表 3 可见, 当围岩采用 Mohr-Coulomb 弹塑性模型时摩擦角 φ 的变异所引起的位移响应的变异最大, 所以它应当是敏感性最强的影响因素。其次, 地应力是第 2 个影响较大的因素, 再往后为弹模与凝聚力。据此选取敏感性较强的 φ 、 σ 、 E 为随机参数, 求出围岩荷载效应 $u(E, \varphi, \sigma)$ 的概率分布, 如图 13 和 14 所示, 再依据式 (17) 求出围岩的失效概率。

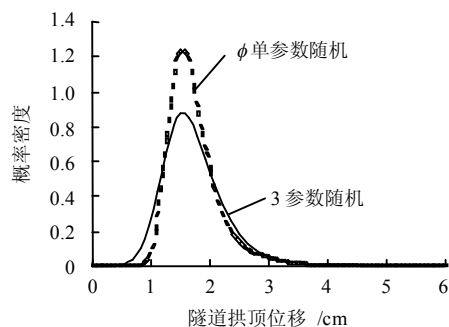


图 13 隧道拱顶位移响应的概率密度函数

Fig.13 Probability density function of displacement of arch crown

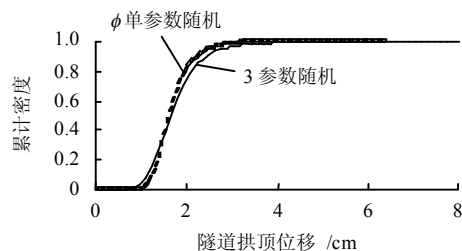


图 14 隧道拱顶位移响应的累计概率分布

Fig.14 Cumulative probability distribution of displacement of arch crown

由图 13 和图 14 可以看出, 当考虑较多的随机参数时位移响应量计算值的变异性也随之增大, 而一般隧道稳定性受众多因素的影响, 将导致理论计算值变异性过大, 甚至失真。计算得到的拱顶位移均值为 1.75 cm , 变异系数增大为 0.33, 数值积分得到的失效概率 $P_f = 6.9 \times 10^{-3}$, 可靠性指标 $\beta = 2.46$ 。

7 结 论

(1) 岩土力学数值模拟的输入参数存在较大的随机变异性, 难以确定准确合理的输入参数值, 这是导致分析结果可靠性较低的主要原因之一。本文提出用来定量评估计算结果变异性的一种基于全概率思想的新方法。数值算例表明该法具有计算效率和精度较高的优点。

(2) 全概率方法是工程可靠性分析手段进一步发展完善的大势所趋, 这类方法可以一次性求得响应量的全概率分布, 具有很多优点。本文提出将 FFT 数值概率分析方法及最大熵法与高效积分法联合使用的新方法, 大大增强了全概率方法的适用性, 将其用于岩土数值模拟结果的变异性分析取得了较好的效果, 值得进一步深入研究。

(3) 高效积分程序可以直接调用现有的具有强大功能的通用数值模拟软件进行计算, 这是其优点之一。但是, 随着输入随机参数数目的增多, 多维积分的计算量会迅速增长, 这是一个有待解决的问题。目前该法最适于考察岩土力学数值模拟中为数不多的几个敏感性最强的随机参数的影响, 比如摩擦角与凝聚力及弹性模量的影响。

参 考 文 献

- [1] 高大钊. 土力学可靠性原理[M]. 北京: 中国建筑业出版社, 1989.
- [2] 陈虬, 刘先斌. 随机有限元法及其工程应用[M]. 成都: 西南交通大学出版社, 1993.
- [3] SAKAMOTO J, MORI Y, SEKIOKA T. Probability analysis method using Fast Fourier transform and its application[J]. **Structural Safety**, 1997, 19(1): 21—36.
- [4] RAVI C Penmetsa, RAMANA V Grandhi. Adaptation of fast Fourier transformations to estimate structural failure probability[J]. **Finite Elements in Analysis and Design**, 2003, 39: 473—485.
- [5] 章光, 朱维申, 白世伟. 计算近似失效概率的最大熵密度函数法[J]. 岩石力学与工程学报, 1995, 14(2): 119—129.
ZHANG Guang, ZHU Wei-shen, BAI Shi-wei. A method of maximum entropy density function for calculation of approximate failure probability[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 1995, 14(2): 119—129.
- [6] 黄诚, 杨春和. 岩土力学数值模拟结果的概率评估方法研究[J]. 岩土力学, 2008, 29(3): 727—733.
HUANG Cheng, YANG Chun-he. Probabilistic evaluation of numerical simulation of geomechanics[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2008, 29(3): 727—733.
- [7] ZHAO Yan-gang, TETSURO Ono. New point estimates for probability moments[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 2000, 126(4): 433—436.
- [8] MARK Gorman. Structural resistance moments by quadrature[J]. **Structural Safety**, 1984, (2): 73—81.
- [9] STROUD A H, SECREST D. Approximate integration formulas for certain spherically symmetric regions[J]. **Mathematics of Computation**, 1963, 17: 105—135.
- [10] 徐利治, 周蕴时. 高维数值积分[M]. 北京: 科学出版社, 1980.
- [11] E. O. 布赖姆. 快速傅里叶变换[M]. 上海: 上海技术科学出版社, 1979.
- [12] SIDDALL J N. Probabilistic Engineering Design: Principles and Applications[M]. New York: Marcel Dekker, 1983.

中美地基处理联合研讨会

(2009 年 3 月在美国 Orlando, 佛罗里达)

中国土木工程学会土力学及岩土工程分会 (CISMGE-CCES) 与美国土木工程师学会岩土分会 (Geo-Institute of ASCE) 就两个学会之间的交流与合作进行了积极协商, 双方决定将于 2009 年 3 月在美国 Orlando, 佛罗里达召开中美地基处理联合研讨会 (Sino-US Workshop on Ground Improvement Technologies)。中美双方各派代表约 25 人, 并拟在会议期间举行合作协议签定仪式。诚挚邀请国内岩土工程的同仁提交高质量的论文, 中方将推荐 10 余位代表在会上进行报告和交流。请提交英文论文, 提交论文摘要的截止日期为 2008 年 7 月 31 日, 提交全文的截止日期为 2008 年 9 月 30 日。论文请提交给: 天津大学土木工程系, 郑刚教授, 邮箱地址: zhengzige2004@yahoo.com.cn。

(信息来源: http://www.geoenv.cn/lrm_article/46/58641.html)